2 · 3 · 5 · 7 · 11

Codes et congruences

Systèmes de numération → p.82

Codes secrets → p.92

Congruences → p.106

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Systèmes de numération

Des « bâtons entaillés » en os, en ivoire ou en bois, datant de la Préhistoire, ont été retrouvés partout dans le monde. On pense que ces entailles correspondent à un dénombrement associant chaque trait à un objet. Les hommes pouvaient ainsi estimer une quantité sans pour autant connaître les nombres.
Ce procédé fut longtemps utilisé.

En Mésopotamie, vers 1500 av. J.-C., des bergers mettaient un caillou dans un sac au passage de chaque bête. Il leur suffisait ensuite d'enlever les cailloux du sac pour vérifier que tous les moutons étaient là.

Au début du siècle dernier, en Suisse, le bâton entaillé servait de note de crédit, à la boulangerie par exemple. Le boulanger fendait dans le sens de la longueur un bâton de 20 cm. Il y inscrivait le nom du client et l'entaillait d'autant d'encoches que de pains pris par son client. L'autre morceau servait de reçu et était donné au client.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Khéops — CO 68

Réfère-toi au «coup de pouce» pour comprendre ce texte.

La pyramide de Khéops est sans doute la plus célèbre des pyramides d'Egypte. Située à Gizeh, elle fut édifiée il y a plus de ***a*** ans par les Egyptiens de l'Antiquité. Actuellement, sa base carrée mesure ***b*** mètres et sa hauteur est de ***c*** mètres.
Considérée comme l'une des *Sept Merveilles du monde*, elle est le tombeau du pharaon Khéops. Imhotep, le grand architecte égyptien, utilisait comme mesure de longueur la «grande coudée royale» qui correspond à ***d*** centimètres.

Initialement, la pyramide de Khéops avait une base de ***e*** coudées et une hauteur de ***f*** coudées.

a

b

c

d

e

f

Quelle hauteur la pyramide de Khéops a-t-elle perdue au cours du temps?
Et quelle largeur?

Les trois Pyramides de Gizeh: Khéops, Khéphren et Mykérinos.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 69 — La Grande Muraille de Chine

Les chiffres chinois (200 av. J.-C.)

chiffres des unités ou des centaines

1	2	3	4	5	6	7	8	9
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨

chiffres des dizaines ou des milliers

1	2	3	4	5	6	7	8	9
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Les Chinois utilisaient une numération de position en base décimale. Ils disposaient de deux notations sous forme de baguettes, qu'ils alternaient pour éviter les confusions entre unités, dizaines, centaines…
Le nombre était lu de gauche à droite et un espace vide était laissé en cas d'absence d'unités, de dizaines, de centaines…

La confusion entre 2001 (𝍡 𝍠) et 21 (𝍪 𝍠) n'était pourtant pas impossible!

La *Grande Muraille de Chine*, patrimoine de l'UNESCO depuis 1987.

La *Grande Muraille de Chine* est un ensemble de fortifications militaires construites entre le III^{e} siècle av. J.-C. et le XVII^{e} siècle pour défendre la frontière nord de la Chine.

Un «li» est une ancienne unité de longueur chinoise dont la valeur varie suivant la région et l'époque.

Dès la dynastie Qin, un li correspond à 𝍤 𝍮 𝍥 mètres.

Pendant des siècles, la *Grande Muraille de Chine* fut surnommée «La longue muraille de dix mille li».

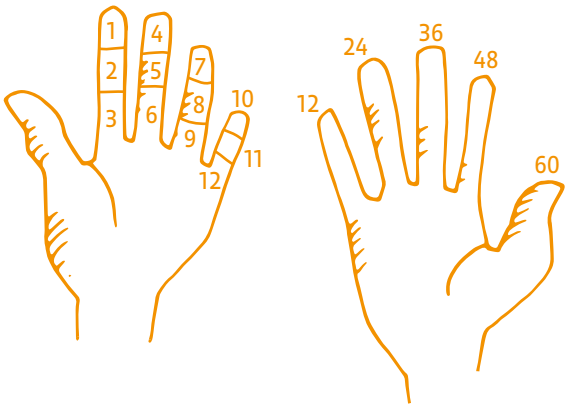
Ecris, en écriture chinoise puis en écriture décimale, la longueur supposée de la muraille en km.

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Des doigts et des pieds pour compter

Comme nous avons dix doigts, il nous paraît naturel de compter en base dix. Mais cela n'a pas toujours été le cas.

Les Babyloniens, qui vivaient dans l'actuel Irak il y a 4000 ans, comptaient en base 60 (base sexagésimale). Certains historiens pensent qu'ils utilisaient le pouce pour compter les 12 phalanges d'une main et les doigts de l'autre main pour comptabiliser les douzaines. Ainsi on arrive à un total de 60.



Les Babyloniens avaient observé qu'il s'écoule approximativement 360 jours avant que le cycle des saisons ne se reproduise. Or, coïncidence, le nombre 360 est un multiple de 12 et de 60. Assimilant le cycle des saisons à un cercle, ils ont divisé celui-ci en 360 degrés. Ils ont aussi divisé l'année en douze mois, la journée et la nuit en douze heures, chaque heure en 60 minutes et chaque minute en 60 secondes.

Quant à la semaine de sept jours, elle serait due au fait que les Babyloniens avaient repéré sept astres se déplaçant dans le ciel : le Soleil, la Lune, Mars, Mercure, Jupiter, Vénus et Saturne. D'où le fait que, aujourd'hui encore, les jours de la semaine sont nommés d'après ces sept astres dans beaucoup de langues.

Certaines tribus de Papouasie, en Nouvelle-Guinée, comptent sur leurs mains et leurs pieds. Ainsi après les dix doigts, ils comptent les dix orteils et arrivent donc à une base 20.

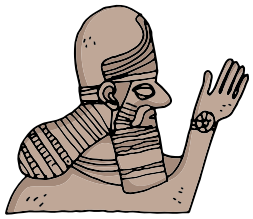
Certains peuples africains ont utilisé, jusqu'au XX^{e} siècle, une base 5 (base quinaire) comme les cinq doigts de la main.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 70 — Souvenir babylonien

Réfère-toi au «coup de pouce» pour comprendre ce texte.



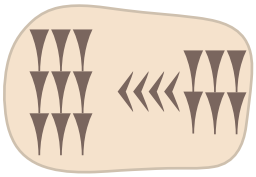
Nabuchodonosor II (634–562 av. J.-C.) est un célèbre roi de Babylone. Dès ***a*** av. J.-C., il régna durant ***b*** ans jusqu'à sa mort. Il conquit Jérusalem en ***c*** av. J.-C.

Son nom a été donné à une grosse bouteille utilisée pour contenir du champagne ou du vin. On connaît aussi le jéroboam, le mathusalem ou le melchizedec.

Un nabuchodonosor contient ***d*** jéroboams et un jéroboam contient ***e*** bouteilles. Une bouteille contient ***f*** centilitres. Un melchizedec contient ***g*** bouteilles et un mathusalem en contient ***h***.

a

b

c 

d

e

f

g

h

a. Quelle est la contenance d'un nabuchodonosor, un melchizedec, un jeroboam et un mathusalem en litres?

b. Ecris en numération babylonienne l'année de naissance et de mort de Nabuchodonosor II.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

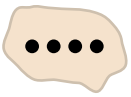
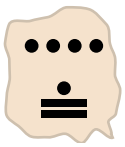
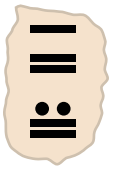
La pyramide de Kukulkan — CO 71

La pyramide de Kukulkan, classée au patrimoine mondial de l'UNESCO depuis 2007.

La pyramide de Kukulkan au Mexique, construite par les Mayas au XII^{e} siècle, est dédiée au «dieu serpent à plumes». Elle est orientée de telle sorte que lors des équinoxes de printemps et d'automne, les rayons du Soleil arrivant sur la pyramide créent un jeu d'ombres dessinant le «dieu serpent à plumes» descendant le long de la pyramide.

Réfère-toi au «coup de pouce» pour comprendre ce texte.

Cette pyramide de base carrée a une hauteur de ***a*** mètres. Elle est constituée de ***b*** escaliers comportant chacun ***c*** marches.

a ***b***  ***c***  ***d*** 

a. Quelle est la hauteur de cette pyramide?

b. Quelle est la somme du nombre de marches de chaque escalier à laquelle on ajoute la dernière marche pour entrer dans le temple? A quoi peut correspondre ce nombre?

c. Cette année-là, en ***d***, les médias ont beaucoup parlé de la civilisation maya. De quelle année s'agissait-il et pourquoi les médias en ont-il tant parlé?

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Quand le zéro se met à compter

Vers 2000 av. J.-C., les Babyloniens utilisaient une numération de position en base 60. Ils laissaient un espace vide pour signifier le «rien» qui n'était pas considéré comme un chiffre. Difficile alors de différencier le 2 du 61:

1 + 1 = 2

1 + vide + 1 = 61

Vers 300 av. J.-C., l'espace laissé entre deux symboles est remplacé par deux clous inclinés marquant l'espace vide. Les scribes introduiront ce signe qu'on peut considérer comme l'ancêtre du zéro puisqu'ilpermet de distinguer la valeur d'un symbole en fonction de sa position dans un nombre:

Par contre, pour les Babyloniens, ce signe ne correspondait toujours pas à une quantité.

Vers 350 av. J.-C., pour le mathématicien et philosophe grec Aristote (384–322 av. J.-C.), l'Univers était fini et rempli de matière. Pour lui, le vide comme l'infini n'existaient pas. Ainsi, pour les Grecs, un nombre représentant le néant était inconcevable.

Au I^{er} siècle, les Mayas utilisaient une numération de position en base 20 et utilisaient un symbole représentant un ovale ou un coquillage comme signe séparateur, permettant une écriture des nombres sans ambiguïté.

Manuscrit Maya de la région de Chichén Itzá.

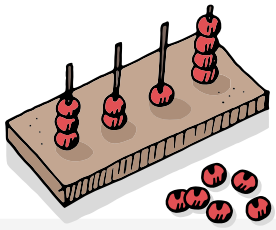
Les philosophies orientales s'accordent très bien avec le «rien» et l'infini. C'est en Inde, vers 500, que le zéro devient un nombre à part entière. En 628, dans un traité d'astronomie, Brahmagupta (598–668) définit le zéro comme la soustraction d'un nombre par lui-même. Vers 900, les mathématiciens arabes, s'inspirèrent des travaux indiens et intégrèrent également le zéro dans les calculs.

Vers 1200, le zéro arriva en Europe occidentale. C'est le mathématicien et commerçant italien **Léonard de Pise**, dit Fibonacci (1170–1240), qui le «ramena» de ses voyages autour de la Méditerranée.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Le boulier de Tchang — CO 72



a. Tchang a un boulier constitué de 4 tiges verticales sur chacune desquelles il peut enfiler jusqu'à 4 perles. Il dispose de 16 perles.

Tchang prétend qu'il peut afficher sur son boulier tous les nombres de 0 à plus de 600.

Comment s'y prend-il pour représenter 100?
Quel est le plus grand nombre qu'il peut afficher?

b. Tchang possède aussi 20 perles plus petites qui peuvent remplacer les précédentes et être enfilées par cinq sur chaque tige.

Comment s'y prend-il pour représenter 100?
Quel est le plus grand nombre qu'il peut afficher en utilisant les petites perles?

CO 73

Calculs de bases — CO 74

a. Effectue les calculs suivants en base 2:

101 + 111 | 11 000 + 11 110 | 1010 + 111 | 1111 + 111

b. Effectue les calculs suivants en base 5:

34 + 21 | 123 + 42 | 122 + 433 | 230 + 1332

c. Effectue les calculs suivants en base 8:

63 + 124 | 476 + 654 | 1277 + 6733 | 777 + 342

d. Effectue les calculs suivants en base 12 (♥ = 10 et ☺ = 11):

99 + 65 | 1♥6 + 87☺ | 1056 + 3465 | ☺☺7 + ♥5♥

CO 75

Bases secrètes — CO 76

James affirme que toutes ces égalités sont vraies sauf une. Laquelle est fausse? Justifie.

a. 113 = 21 + 32 **b.** 41 = 26 + 12 **c.** 40 = 26 + 12

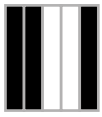
d. 113 = 21 + 42 **e.** 67 = 21 + 42

canton de vaud

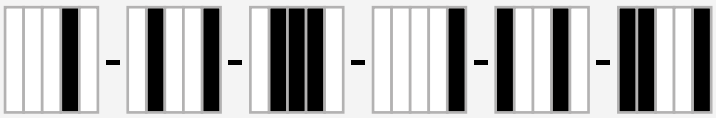
Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 77 — Code-barres

Ce code-barres est la représentation d'une écriture binaire écrite sous la forme d'une série de lignes parallèles et d'épaisseur égale :

1 1 0 0 1 est représenté par 

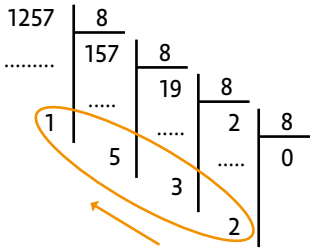
a. En associant dans le système décimal **A** à 1, **B** à 2… décode ceci :



b. Code Eurêka de cette façon.

CO 78 — Méthode pratique

Lorsqu'elle cherche à écrire un nombre décimal dans une autre base, Sandrine applique la méthode suivante :



a. Elle prétend que le nombre décimal 1257 s'écrit 2351 en base 8. A-t-elle raison ? Justifie.

b. Comment écrit-on 1257 en base 6 ? en base 9 ? en base 11 ?

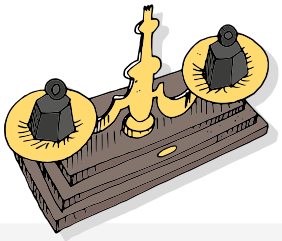
c. Yves-Alain choisit un nombre. Il le divise par 7 et trouve un reste égal à 5. Il divise le quotient obtenu par 7 et trouve un reste de 3 et un quotient égal à 12.

Quel nombre Yves-Alain a-t-il choisi ?

CO 79 — Balance binaire

Tu disposes d'une balance de Roberval, balance à deux plateaux qui s'équilibre quand les masses qui s'y trouvent sont égales.

A ta disposition, tu as également des masses de 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g, et ainsi de suite, chaque masse étant le double de la précédente.



a. D'un côté de la balance, tu places un objet de 31 g.
Quelles masses vas-tu placer sur l'autre plateau pour obtenir l'équilibre ?

b. Et pour un objet de 78 g ?

c. Pourquoi peut-on dire que cette façon de peser a quelque chose de « binaire » ?

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Sur la planète Physicomatix — CO 80

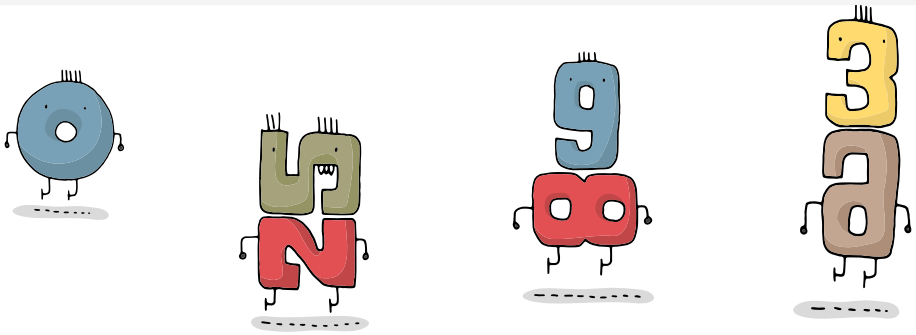
Sur la planète Physicomatix vivent les Mathoks. Les Mathoks ont une bien curieuse façon de compter. Ils n'utilisent que quatre chiffres : ZIK, MA, SEL et FI.

On sait que ZIK correspond à notre zéro, MA à 1, FI à 3, MA.ZIK à 4, SEL.MA à 9.

a. A combien correspondent les nombres suivants ?
FI.ZIK MA.MA SEL.FI MA.FI.SEL.

b. Effectue cette somme MA.FI.SEL + MA.SEL et donne la réponse dans le langage Mathoks.

c. Fais de même avec FI.ZIK.MA.ZIK + SEL.ZIK.MA



T'as le ticket « Bazassette » — CO 81

Daniel va remplacer son cousin Louis à la caisse du théâtre « Bazassette ».

Ce dernier lui explique comment faire :
« C'est très simple ; imagine qu'il y a 26 entrées. Tu appuies sur **26**, sur la touche **×**, puis sur le prix d'une entrée, par exemple **202** et enfin sur **Total** ».

Le montant de 5555 s'affiche automatiquement.

Comment cela est-il possible ?

T'es binaire — CO 82

Il y a 10 sortes de personnes, celles qui connaissent le code binaire et les autres.

Cette phrase est-elle absurde ?

canton de vaud

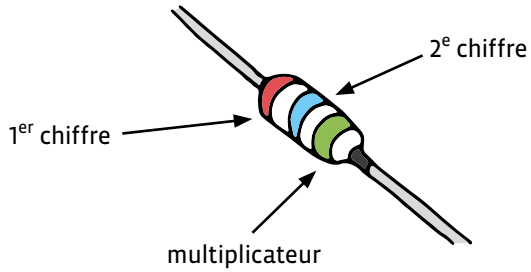
Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Codes secrets

Une résistance électrique est un composant électronique dont la caractéristique est de s'opposer à la circulation du courant électrique. On en trouve dans de nombreux appareils électriques. Plus la résistance est élevée, plus l'intensité du courant qui la traverse est faible.
L'unité de résistance électrique est le Ohm, en l'honneur du physicien allemand Georg Simon Ohm (1789 – 1854).

La plupart des résistances sont codées à l'aide de bandes de couleurs permettant d'identifier leur valeur.

Code des couleurs des résistances au carbone										
couleur										
1er chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2e chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
multiplicateur	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6			



A combien de Ohms correspond cette résistance ?

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Mots cachés — CO 83

Observe les trois grilles suivantes:

P	H	Y
S	I	C
I	E	N

S	I	C
I	E	N
P	H	Y

I	S	C
E	I	N
H	P	Y

Découvre le mot caché dans chacune des grilles suivantes:

a.

D	O	E
R	U	S
E	D	C

b.

H	A	U
A	C	C
T	E	E

c.

M	E	T	A
C	I	E	I
N	N	S	E
A	M	H	T

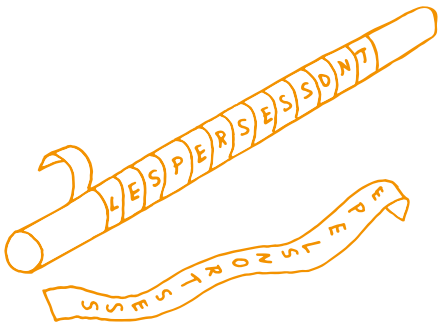
Was sagst du? — CO 84

Dekodiere diesen Satz:

NEBEIRHCSEGTRHEKREVHCSTUEDFUATSITXETRESEID

La scytale spartiate

Les premiers utilisateurs de messages codés appartenaient à la plus guerrière des cités grecques: Sparte. Les Spartiates enroulaient une bandelette de cuir ou de parchemin autour d'un bâton de diamètre connu. Ils écrivaient leur texte sur le parchemin, puis déroulaient la bandelette qu'ils pouvaient transmettre sans crainte puisqu'elle ne contenait qu'un hachis de lettres incompréhensible. Il suffisait au destinataire d'enrouler le message autour d'un bâton de même diamètre pour découvrir le message.



Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 85

CO 86 — Le carré de Polybe

Conçu par le général grec Polybe (208–126 av. J.-C.), ce système est le premier à remplacer des lettres par des chiffres.
Les lettres sont placées dans le tableau ci-dessous. Chaque lettre est associée aux coordonnées (colonne.ligne) de la case où elle se trouve; ainsi **A** devient 1.1 , **B** est codé 2.1 , **C** 3.1 et ainsi de suite.

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	IJ	K
3	L	M	N	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

a. Décode le message suivant: **3.2 4.2 3.4 4.4 4.3 2.4 4.2 5.1 3.3**

b. En utilisant cette méthode, code **MEGALOPOLIS**, ville natale de Polybe.

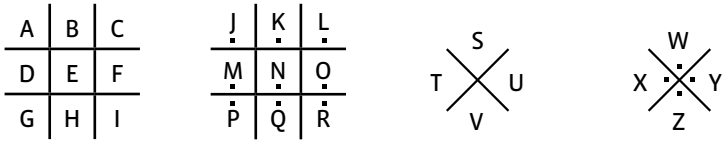
Le code des Templiers

Au Moyen Age, la puissance financière et militaire des Templiers attisait les convoitises et la jalousie. Les membres de cet ordre inventèrent les lettres de crédit qui permettaient de déposer de l'argent dans une commanderie et de le récupérer dans une autre, leur évitant ainsi de transporter de l'argent avec les risques que cela pouvait impliquer.
Ils eurent l'idée de coder leurs lettres de crédit. Le codage s'inspirait du découpage de la croix de Malte, emblème de leur ordre.

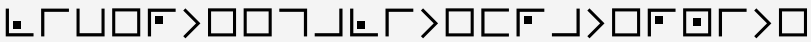
Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

L'alphabet du parc à cochons — CO 87

L'alphabet du parc à cochons, inspiré du code des Templiers, a été inventé au XVIII[e] siècle:



Décode ceci:



L'alphabet de Jules César — CO 88

Pendant la guerre des Gaules, Jules César (100–44 av. J.-C.) eut l'idée simple mais efficace de transmettre des messages codés en décalant simplement chaque lettre de trois crans dans l'alphabet. Ainsi **A** devient **D**, **B** devient **E** et ainsi de suite.

a. Code la phrase suivante de cette façon:
JE SUIS VENU, J'AI VU, J'AI VAINCU

«Veni vidi vici» en latin, cette phrase aurait été prononcée par Jules César, en 47 av. J.-C., pour décrire sa victoire rapide en Arménie.

b. Décode la phrase suivante:
OHVRUWHQHVWMHWH

Cette phrase aurait été prononcée par Jules César, en 49 av. J.-C., en franchissant la rivière Rubicon marquant la frontière entre la Gaule et l'Italie, avant de marcher sur Rome avec son armée.

Tout système de décalage alphabétique, quel que soit le nombre de crans choisi, est appelé «alphabet de Jules César».

On peut donner une clé pour permettre de connaître le décalage: Avocat (A=K); Hélène (L=N); Elle aime (L=M); Déesse (D=S); Idée (I=D); Avé (A=V), Hier (I=R); Hervé (R=V); Œufs pourris (E=I).

Pour trouver facilement les correspondances entre les lettres, tu peux utiliser la roue ou la réglette que tu peux découper dans ton fichier. Tu peux également effectuer un calcul en utilisant les classes de restes modulo 26.

c. Décode avec la clé HÉLÈNE:
FCPUEGOQPFGKNHCWVGVTGWPRGWVTQRDQPRQWTNGVTGCUUGB
Citation de l'écrivain français Marivaux (1688–1763).

d. Décode sans clé donnée:
1. **BWKMAKSJJANWSVWUJQHLWJUWEWKKSYW**
2. **IDFLOHDOLUHOHFRGHGHFHVDU**

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 89 — L'alphabet désordonné

Pour établir l'ordre des lettres de cet alphabet, procède comme l'exemple suivant:

Choisis un mot-clé: MATHPHYSIQUE
Si des lettres apparaissent plusieurs fois, supprime celles qui sont déjà utilisées.
La clé devient: MATHPYSIQUE

Inscris dans le tableau les lettres de la clé et complète-le avec les lettres de l'alphabet manquantes:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
M	A	T	H	P	Y	S	I	Q	U	E	B	C	D	F	G	J	K	L	N	O	R	V	W	X	Z

a. Code avec la clé MATHPHYSIQUE: **CECI EST UN MESSAGE ARCHI SECRET**

b. Décode avec la clé MATHPHYSIQUE: **NOHPRQPDLODYQDBQCQPK**

c. Décode avec la clé LA CLÉ DES CHAMPS
GDJRDPHJDIDJTEDVQLPTDTQDLPJRPCDGUPOUPGDQDCKPTGDQDCUDPGGDCK
IIDUJEKJPJDRTPILAGDILPRBLILPRCKIIDUJDCKJTQLPJTDNDJPAGD
Citation d'Albert Einstein (1879–1955)

d. Décode avec la clé SPIELBERG:
HLJTAOCSHSAQFSVLOATLLQTPALJTOKMSHUQSJTL
Citation de Steven Spielberg (1946–)

Toujours plus difficile à décoder
L'alphabet de Jules César n'a que 25 clés possibles.
Travailler avec un alphabet désordonné augmente le nombre de clés possibles.
En effet, on peut associer une des 26 lettres à la lettre A, puis une des 25 lettres restantes à la lettre B, puis une des 24 lettres restantes à la lettre C et ainsi de suite. Il y a donc 26 · 25 · 24 · 23 · 22 · … · 4 · 3 · 2 · 1 = 403 291 461 126 605 635 584 000 000 possibilités d'alphabets possibles.
Soustrayons 1 afin de ne pas prendre en considération l'aphabet qui n'effectue aucun changement, on obtient 403 291 461 126 605 635 583 999 999 clés possibles!

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

La méthode d'Al-Kindi — CO 90

Si on ne possède pas la clé de l'alphabet de codage, on peut utiliser la méthode décrite par le savant arabe Abu Yusuf Al-Kindi (801–873).

On repère la lettre la plus fréquente du texte codé. On fait l'hypothèse qu'elle correspond à la lettre «e» du texte en clair, car c'est la lettre la plus utilisée en français. Le «a», le «s» et le «i» sont aussi des lettres très utilisées. Les combinaisons fréquentes de 2 ou 3 lettres comme «le», «de», «les» ...sont facilement repérables, surtout dans un texte long, et fournissent d'autres informations sur les correspondances entre lettres en clair et lettres codées.

Décode ce texte sans clé donnée:

VKMBIZDYQBKZRSOBOWYXDOKDBOCVYSXNKXCVRSCDYSBOOXOPPODEXODYW LOOQIZDSOXXONKDKXDNOZVECNOAEKDBOWSVVOKXCKODONOMYEFOBDOCEB VKAEOVVONOCRSOBYQVIZROCYXDODOWYNSPSOCKPSXNYLCMEBMSBVOCOXCN OCSXCMBSZDSYXC

Fréquence des lettres en % dans la langue française

Rang	Lettre	%	Rang	Lettre	%
1	E	17,124	14	M	2,968
2	A	8,122	15	V	1,638
3	S	7,948	16	Q	1,362
4	I	7,580	17	F	1,066
5	T	7,244	18	B	0,901
6	N	7,095	19	G	0,866
7	R	6,553	20	H	0,737
8	U	6,369	21	J	0,545
9	L	5,456	22	X	0,387
10	O	5,387	23	Y	0,308
11	D	3,669	24	Z	0,136
12	C	3,345	25	W	0,114
13	P	3,021	26	K	0,049

La disparition du *e*

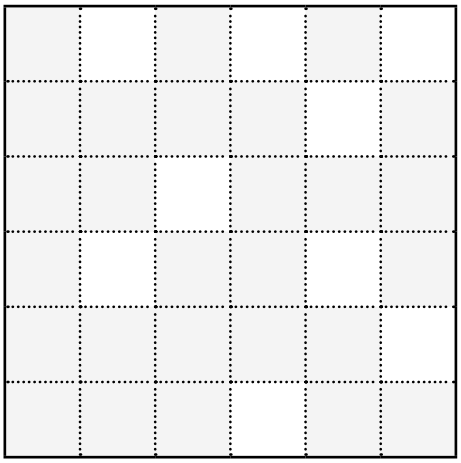
L'écrivain français Georges Perec (1936–1982) a écrit un roman intitulé *La disparition* de plus de 300 pages sans utiliser une seule fois la lettre «e». Voilà un texte dont la fréquence des lettres ne correspond pas à celle des autres textes écrits en français.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 91 — La grille tournante du colonel Fleissner

Le colonel autrichien Edouard Fleissner (1825–1888) utilisait une grille de 36 cases percée de 9 trous, comme celle-ci, pour coder ses messages:



Cette grille peut être découpée dans ton fichier.

La phrase du poète français **Jean Cocteau** (1889–1963) «Un secret a toujours la forme d'une oreille» est cachée dans le tableau suivant:

N	U	A	N	E	S
F	O	T	R	E	O
E	O	C	U	R	I
J	R	L	M	E	O
L	E	U	E	R	T
D	S	’	A	U	L

a. Comment procéder pour décoder ce tableau avec la grille qui t'est proposée?

b. Code la phrase de l'écrivain français **Victor Hugo** (1802–1885):
PERSÉVÉRER, LE SECRET DE TOUS LES TRIOMPHES.

c. Fabrique une autre grille à trous capable de coder une phrase de 36 lettres.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Le code de Della Porta — CO 92

Le physicien italien **Giambatista della Porta** (1535–1615) est l'inventeur du premier code où différents alphabets de codage sont utilisés en même temps. Ainsi une même lettre peut être codée par des lettres différentes.

Della Porta emploie onze alphabets de codage différents, **AB**, **CD**, **EF**, … représentés dans le tableau ci-contre.

– Pour coder une lettre, on choisit la lettre qui lui fait face.
Par exemple, la lettre **M** devient **Z** avec l'alphabet de codage **A** ou **B**. La lettre **S** devient **F** avec ce même alphabet de codage. La lettre **M** devient **R** avec l'alphabet **C** ou **D**.

– Chaque lettre est codée avec un alphabet de codage différent. Le choix de ces alphabets est défini par une clé.
Par exemple si la clé est **PORTA**, on utilisera successivement les alphabets de codage **P**, **O**, **R**, **T**, **A**, **P**, **O**, … pour coder le message.

– On n'utilise pas la lettre **K**. Les lettres **I** et **J** sont considérées comme une seule et même lettre, de même que les lettres **U, V** et **W**.

AB	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M
	N	O	P	Q	R	S	T	V	X	Y	Z
CD	A	N	B	O	C	P	D	Q	E	R	F
	S	G	T	H	V	I	X	L	Y	M	Z
EF	A	I	R	B	L	S	C	M	T	D	N
	V	E	O	X	F	P	Y	G	Q	Z	H
GH	A	Y	C	V	E	S	G	Q	I	O	M
	Z	B	X	D	T	F	R	H	P	L	N
IL	A	C	E	G	I	M	O	Q	S	V	Y
	B	D	F	H	L	N	P	R	T	X	Z
MN	A	B	S	C	D	T	E	F	V	G	H
	I	L	X	M	N	Y	O	P	Z	Q	R
OP	A	B	C	L	D	E	F	M	G	H	I
	P	R	N	Y	S	O	Q	X	T	V	Z
QR	A	B	C	S	D	E	F	T	V	G	H
	I	L	M	X	N	O	P	Y	Z	Q	R
ST	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
	M	N	O	P	Q	R	S	T	V	X	Y
VX	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	V	X
YZ	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	V

a. Code avec la méthode de Della Porta la phrase **LES MURS ONT DES OREILLES** avec la clé OPTION.

b. Décode avec la même clé :
ABRMOVYPCPBYODXXEZDCRTPZOICBDNONBCOH

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Cachette pour Pâques
Della Porta découvrit également comment cacher un message dans un œuf cuit dur: il suffit d'écrire le message sur la coquille avec un mélange d'alun et de vinaigre. La solution pénètre à travers la coquille et se dépose sur le blanc de l'œuf. Il ne reste plus qu'à peler ce dernier pour découvrir le message!

CO 93

CO 94 — Véridique!

En 1674, le **Chevalier de Rohan** (1635–1674), étant soupçonné de conspiration, fut capturé et mis au secret.
Son complice fut tué lors de sa capture et ne put donc rien dévoiler de leurs intentions. Mais cela, Louis de Rohan ne le savait pas.

Ses amis lui transmirent le message suivant, caché à l'intérieur de la manche d'une chemise, afin de l'avertir que rien n'avait été divulgué:

MG DULHXCCLGU GHJ YXUJ LM CT ULGC ALJ

Message cité par André Lange et Emile-Arthur Soudart dans *Traité de cryptographie*, Ed. F. Alcan, 1935.

Rohan ne parvint pas à le décoder. Il avoua et fut exécuté.

Es-tu capable de décoder ce message?

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Un tableau pour coder — CO 95

Alice et Bob ont convenu d'une clé qui correspond au nombre de colonnes d'un tableau rectangulaire.

Avec la clé 14:

A	L	I	C	E	E	T	B	O	B	O	N	T	C
O	N	V	E	N	U	D	U	N	E	C	L	E	Q
U	I	C	O	R	R	E	S	P	O	N	D	A	U
N	O	M	B	R	E	D	E	C	O	L	O	N	N
E	S	D	U	N	T	A	B	L	E	A	U	R	E
C	T	A	N	G	U	L	A	I	R	E			

Leur texte est codé comme ceci:
AOUNECLNIOSTIVCMDACEOBUNENRRNGEURETUTDED
ALBUSEBAONPCLIBEOOEROCNLAENLDOUTEANRCQUNE

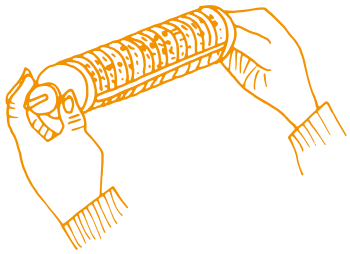
a. Comment procéder pour décoder ce texte?

b. Décode le texte suivant avec la clé 10:
HNVMEDAALENALZTVOVLIBOENOUCGBSITRDNHEEE

Le cylindre de Jefferson

Futur président des Etats-Unis, Thomas Jefferson (1743–1826) inventa, dans les années 1790, un système de codage composé de plusieurs roues, enfilées sur un axe commun. Chacune d'entre elles porte sur la tranche un alphabet complet dans le désordre.

Pour coder un message, il faut tourner les roues de sorte que le message apparaisse sur une ligne. Une des 25 autres lignes est choisie afin de constituer le message à transmettre. Le correspondant, équipé de la même machine, n'a plus qu'à reproduire le message incohérent. En parcourant tout le cylindre, il trouvera le message clair sur une autre ligne.



Ce système fut repris près de 120 ans plus tard par l'armée américaine qui l'utilisa de 1922 à 1942.

CO 96

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 97 — Le code Playfair

Le code du **baron Lyon Playfair** (1818–1898) nécessite une grille 5×5 contenant les vingt-cinq lettres de l'alphabet sans le W. La grille est remplie à partir d'un mot ou d'une phrase clé.

D	E	U	X	H
O	M	S	P	R
N	C	L	A	B
F	G	I	J	K
Q	T	V	Y	Z

Prenons, par exemple, la clé: DEUX HOMMES POUR UNE CLÉ qui devient DEUXHOMSPRNCL après avoir supprimé les lettres qui y figurent déjà. On place les lettres les unes après les autres de gauche à droite et de haut en bas et on complète avec les lettres de l'alphabet manquantes.

Pour coder un texte, on regroupe les lettres de ce texte par groupes de deux lettres (nommés bigrammes), puis on applique les règles suivantes:

D	E	U	X	H
O	**M**	**S**	P	**R**
N	C	L	A	B
F	G	I	J	K
Q	T	V	Y	Z

D	E	U	X	H
O	M	S	**P**	R
N	C	L	**A**	B
F	G	I	**J**	K
Q	T	V	**Y**	Z

D	E	U	X	H
O	M	**S**	P	**R**
N	C	L	A	B
F	G	**I**	J	**K**
Q	T	V	Y	Z

- Si les deux lettres sont sur la même ligne, on prend les deux lettres qui les suivent à droite; **MR** est codé **SO**.
- Si les deux lettres sont sur la même colonne, on prend les deux lettres qui les suivent en-dessous; **PJ** devient **AY**.
- Si les deux lettres sont sur les sommets d'un rectangle, on prend les deux lettres se trouvant aux deux autres sommets du rectangle, sans changer de ligne entre une lettre et sa lettre codée; **SK** devient **RI**.
- Si le bigramme contient deux lettres identiques, on insère une lettre nulle (par exemple **X**) entre les deux. **COMME** devient **CO MX ME** et se code **NMPECM.**

a. En utilisant la clé DEUX HOMMES POUR UNE CLÉ, découvre la première partie d'une citation de Nelson Mandela (1918–2013):
MEMHIVKBMGDCUMYMLPMUSIMCDCVMUEHCBPPBPUMUOHUMUMBELJCDPU

b. Avec la même clé, code la suite de la phrase de Mandela:
C'EST VIVRE D'UNE FAÇON QUI RESPECTE ET RENFORCE LA LIBERTÉ DES AUTRES.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Le code Playfair

Le code de Playfair fut utilisé durant la Première Guerre mondiale par l'armée britannique afin de coder les messages télégraphiques. Vu la facilité du principe de codage et de décodage, les Allemands, les Australiens et les Néo-Zélandais l'utilisèrent également durant la Seconde Guerre mondiale pour les communications locales de moindre importance; il fallait que les informations transmises soient caduques au moment où les ennemis décodaient le message.

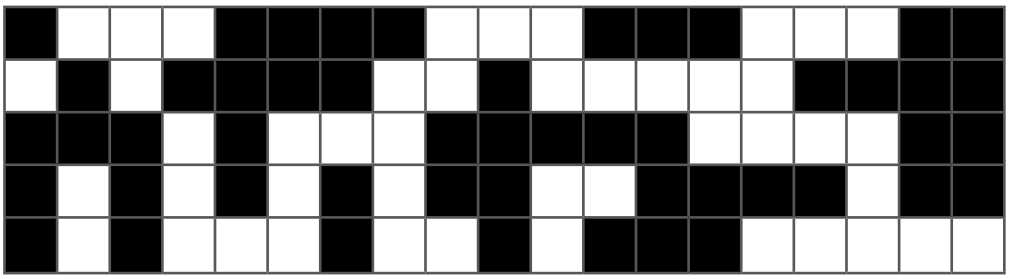
Le masque jetable — CO 98

Pour décoder le message suivant, on superpose la clé et le message codé et on applique les consignes suivantes:

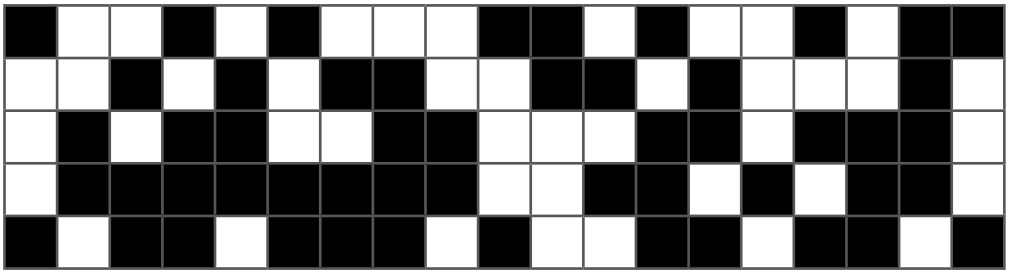
– deux cases de même couleur donnent une case noire;

– deux cases de couleurs différentes donnent une case blanche.

Voici la clé:



Décode ce message secret:



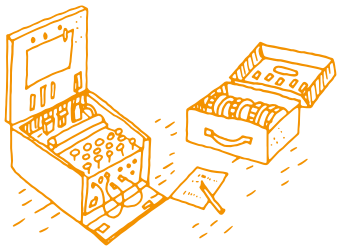
Ce codage proposé en 1917 par l'ingénieur américain Gilbert Vernam (1890–1960), aurait été utilisé par les Américains et les Russes pour coder les communications du célèbre «téléphone rouge» entre la Maison Blanche et le Kremlin.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Enigma

La machine de codage *Enigma* fut développée en 1918 en Allemagne par l'ingénieur en électricité Arthur Scherbius (1878–1929). Brevetée et commercialisée en Europe et dans le monde entier dans les années 1920, elle était utilisée par les services militaires et diplomatiques de nombreuses nations.



Des cryptologues polonais parvinrent, dans les années 1930, à automatiser le déchiffrement *d'Enigma*.
Lors de la Seconde guerre mondiale, la machine *Enigma* utilisée par l'armée allemande fut complexifiée par l'ajout de rotors et semblait «incassable» avec ses 159 milliards de milliards de possibilités de codages différents.

Disposant des travaux réalisés par les cryptologues polonais, un petit groupe de cryptologues britanniques dont Alan Turing (1912–1954) parvint à réaliser une machine capable de «casser» les messages codés par l'armée allemande. Cette découverte étant restée secrète, les Allemands continuèrent à transmettre leurs messages à l'aide d'*Enigma*. Les Alliés les décodèrent et ceci permit de mettre un terme à la Seconde Guerre mondiale deux ans plus tôt.

En Suisse, dès 1944, une nouvelle machine, la *NEMA* (NEue MAschine), plus sûre, fut développée et utilisée jusqu'en 1992.

CO 99 ··· CO 100 ··· CO 101

CO 102 — Jules et Wolfgang

Pour découvrir une citation du compositeur autrichien Wolfgang Amadeus Mozart (1756–1791), décode les deux messages suivants:

a. Le premier message est codé avec l'alphabet de Jules César et sa résolution te permettra de décoder le deuxième message:
16.17.26.1.25.11.26.1.15.8.1.9.1.15.15.23.3.1.15.17.5.18.23.10.16.23.18.1.25.8.23.25.8.1.11.10.22.1

b. Le deuxième message est codé à l'aide de clés publiques RSA comme décrit dans l'exercice CO 101
15.23.4.23.30.13.23.21.13.23.4.3.18.23.18.23.13.21.7.30.23.13.10.16.29.13.17.29.4.23.21.30

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Vers un codage infaillible?

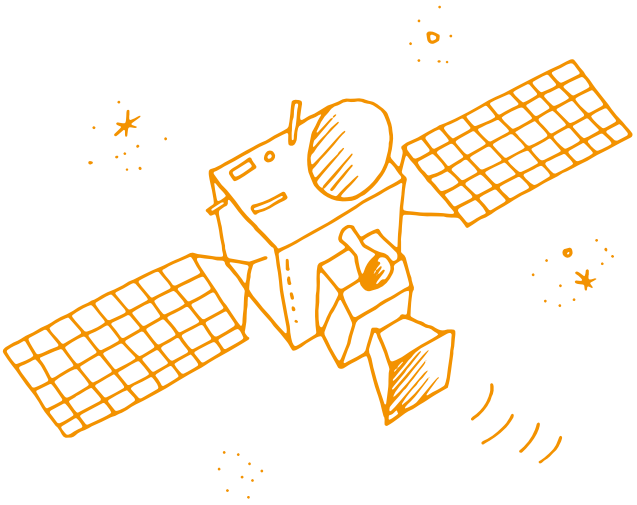
Fondé sur l'idée que les ordinateurs ne peuvent stocker des quantités de données très importantes, le système de codage suivant a été imaginé par deux chercheurs de l'Université de Harvard.

Un satellite émet, de manière aléatoire, un flux continu de nombres. La personne qui veut coder un message choisit un instant précis, au millième de seconde, à partir duquel elle va relever la suite de nombres diffusées par le satellite. Cette suite lui servira de clé.

Elle aura auparavant communiqué à son récepteur, par un codage classique, le moment précis à partir duquel ce dernier devra également relever les nombres diffusés par le satellite.

Le récepteur peut alors décoder le message presque instantanément.

Supposons qu'un tiers intercepte le message l'informant sur le moment à partir duquel les informations du satellite doivent être relevées et tente de le décoder. Cela prendra un certain temps, pendant lequel il ne peut enregistrer toutes les données émises par le satellite car elles sont trop volumineuses. Il laissera ainsi passer la clé qu'il ne pourra jamais retrouver.



canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Congruences

Un mathématicien effeuille une marguerite formée d'un grand nombre de pétales…
Elle m'aime un peu, à moitié, beaucoup, à la folie, exponentiellement, infiniment, pas du tout, elle m'aime un peu, à moitié…
Le voilà qui s'apprête à retirer le dernier pétale, le 33^{e} !

Comment l'aime-t-elle ?

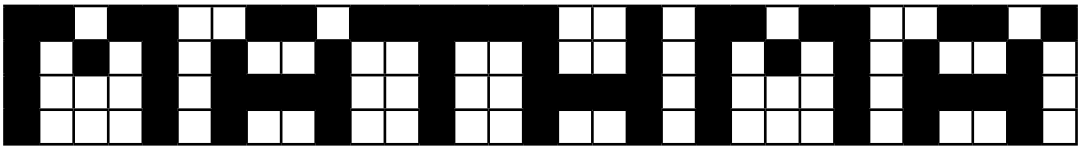
canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Frise mathématique — CO 103

On souhaite créer une frise avec l'inscription M A T H M A T H M…

Il s'agit d'un ruban quadrillé de quatre cases de haut sur environ 10 000 cases de long.



a. On souhaite couper le bout du ruban juste après la lettre H.
Combien de cases compte-t-on sur la longueur?

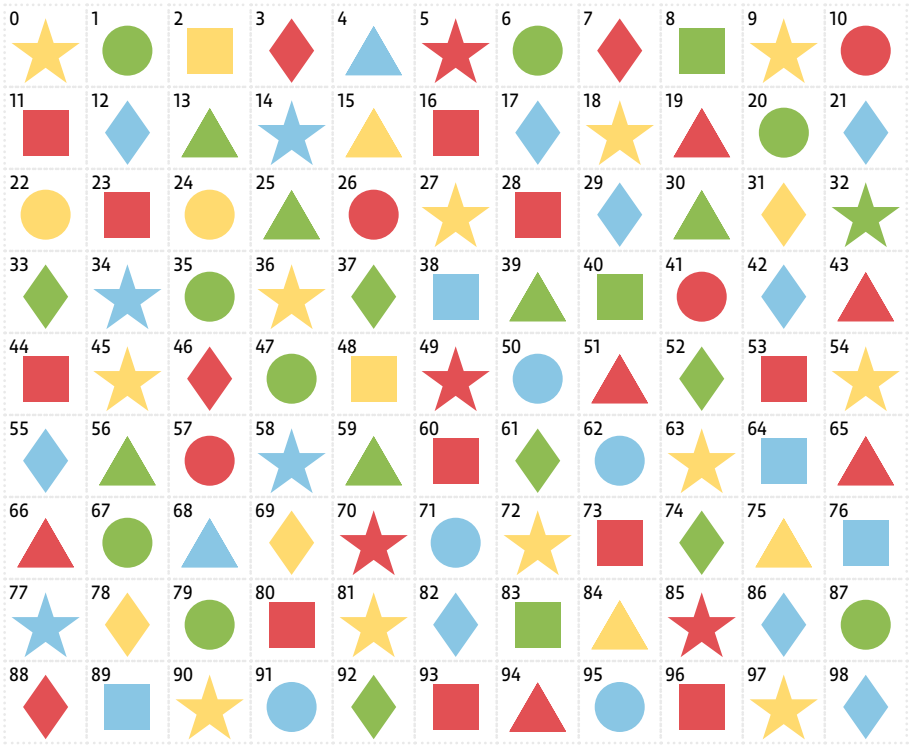
b. Comment est colorée la colonne 8888 ?

c. Combien de carrés noirs y a-t-il jusqu'à la colonne 343 ?

Lecteur de pensées — CO 104

Pense à un nombre entre 1 et 99.
Soustrais-lui la somme de ses chiffres. Exemple: 67 − (6 + 7) = 54

Dans le tableau ci-dessous, repère le symbole associé au nombre que tu obtiens.



Ton enseignant parviendra-t-il à lire dans tes pensées et à te décrire ce symbole?

Comment fait-il?

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 105

CO 106 Code d'accès

Le code d'accès de la porte de mon immeuble est constitué de quatre chiffres:

– le premier chiffre correspond au chiffre des unités de 4^{56};

– le nombre formé par le deuxième et le troisième chiffre correspond à la somme des chiffres d'un nombre formé de 56 chiffres dont le produit des chiffres vaut 2.

– le dernier chiffre correspond au reste de la division par 5 de 4^{56}.

Que vas-tu composer comme code la prochaine fois que tu viendras chez moi?

CO 107 Aus einer geraden Zahl

Wähle eine gerade Zahl.

1. Dividiere sie durch zwei.

2. – Wenn das Ergebnis gerade ist, gehe zu **1.**
– Wenn das Ergebnis ungerade ist, addiere die zwei letzten Zahlen, die du gefunden hast, und gehe wieder zu **2.**

a. Was ist das hundertste Glied der Folge, das mit 34 beginnt?

b. Was ist das tausendste Glied der Folge, das mit 48 beginnt?

das Ergebnis: le résultat
gerade: pair
ungerade: impair
das Glied der Folge: le terme de la suite

CO 108 Ton année de naissance

Construis une suite de nombres commençant par ton année de naissance. Le nombre suivant est obtenu en faisant la somme des carrés des chiffres qui composent le nombre précédent. Et ainsi de suite.

Exemple: Justine est née en 1999. Son premier nombre est 1999, son deuxième est $1^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 = 244$, son troisième est $2^2 + 4^2 + 4^2 = 36$, etc...

Quel sera ton centième nombre?

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

La tour de Sauvabelin — CO 109

Lili, Louise et Arthur grimpent les marches qui les mènent au sommet de la tour de Sauvabelin, à Lausanne.

Lili attaque la première marche avec la jambe droite et monte les marches «deux par deux».
Louise attaque la première marche avec la jambe gauche et monte les marches «trois par trois».
Arthur attaque la première marche avec la jambe gauche et monte les marches «cinq par cinq».

Chacun pose le pied gauche sur la même marche à trois reprises, dont la dernière marche de l'escalier.

Combien de marches comporte l'escalier qui monte au sommet de la tour?

A la recherche de la décimale — CO 110

Quelle est la 3131^{e} décimale de $\frac{31}{13}$?

La date de Pâques — CO 111

Selon Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), mathématicien, astronome et physicien allemand, voici comment on peut calculer la date de Pâques pour les années comprises entre 1900 et 2099 :

- Trouve le reste de la division par 19 de l'année considérée; il s'agit du 1er reste.
- Multiplie le 1er reste par 19, ajoute 24 et divise ce résultat par 30 ; le reste de cette division est le 2^{e} reste.
- Divise l'année considérée par 4 pour obtenir le 3^{e} reste.
- Divise l'année considérée par 7 pour obtenir le 4^{e} reste.
- Additionne à 5, six fois le 2^{e} reste, deux fois le 3^{e} reste et quatre fois le 4^{e} reste. Divise ce résultat par 7 pour obtenir le 5^{e} reste.
- La somme du 2^{e} et du 5^{e} reste donne le nombre de jours séparant le 22 mars du dimanche de Pâques.

Trouve la prochaine date du dimanche de Pâques.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 112 — Cartes à choix

Rose te propose de choisir l'une des deux cartes ci-dessous.

«Nous allons calculer la somme des restes de la division par 4 de tous les nombres de notre carte. Celui qui obtient le plus grand nombre a gagné!»

Quelle carte choisis-tu?

1	2	3	4	5
11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35
41	42	43	44	45

6	7	8	9	10
16	17	18	19	20
26	27	28	29	30
36	37	38	39	40
46	47	48	49	50

CO 113 — Les classes modulo

Quelles sont, parmi les congruences suivantes, celles qui sont vraies?

a. $17 \equiv 29 \pmod 2$
b. $94 \equiv 28 \pmod 6$
c. $17 \equiv 34 \pmod 3$
d. $87 \equiv 19 \pmod{10}$
e. $253 \equiv 45 \pmod 4$
f. $65 \equiv 16 \pmod 7$
g. $117 \equiv 22 \pmod 5$
h. $123 \equiv 24 \pmod{11}$
i. $29 \equiv 3 \pmod{26}$
j. $36 \equiv 10 \pmod{26}$
k. $45 \equiv 19 \pmod{26}$
l. $25 \equiv 24 \pmod{26}$
m. $23 \equiv 3 \pmod{26}$
n. $27 \equiv 25 \pmod{26}$
o. $31 \equiv 6 \pmod{26}$
p. $28 \equiv 2 \pmod{26}$

Enumère l'ensemble des nombres n tels que:

q. $n \equiv 0$ (modulo 2)
r. $n \equiv 1$ (modulo 3)
s. $n \equiv 2$ (modulo 4)
t. $n \equiv 3$ (modulo 5)
u. $n \equiv 4$ (modulo 6)
v. $n \equiv 9$ (modulo 10)
w. $n \equiv 6$ (modulo 7)
x. $n \equiv 10$ (modulo 11)

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Quelle classe ! CO 114

Pour cet exercice, on calcule modulo 8.

a. Quelles sont les classes de restes possibles ?

b. Indique à quelle classe de restes appartiennent les nombres suivants :

76	2000	232	59	620
143	216	69	149	530
595	477	783	100	84

c. Donne trois nombres compris entre 305 et 335 qui appartiennent à la classe de reste $\overline{2}$.

d. Donne trois nombres compris entre 492 et 520 qui appartiennent à la classe de reste $\overline{6}$.

L'addition des classes CO 115

Pour cet exercice, on calcule modulo 5.

$\overline{1} = \{1 ; 6 ; 11 ; 16 ; 21 ; \ldots\}$
$\overline{3} = \{3 ; 8 ; 13 ; 18 ; 23 ; \ldots\}$
$\overline{4} = \{4 ; 9 ; 14 ; 19 ; 24 ; \ldots\}$

$\overline{1} + \overline{3} = \overline{4}$ car si l'on additionne n'importe quel nombre de la classe de reste $\overline{1}$ avec n'importe quel nombre de la classe de reste $\overline{3}$, on obtient un nombre de la classe de reste $\overline{4}$.

a. Vérifie cette propriété avec quelques nombres de ton choix.

b. Que dire de $\overline{1} + \overline{4}$?

c. Donne la classe de restes qui correspond à chaque addition :

$\overline{3} + \overline{3}$ $\quad$ $\overline{2} + \overline{3}$ $\quad$ $\overline{1} + \overline{0}$ $\quad$ $\overline{4} + \overline{3}$

La multiplication des classes CO 116

Pour cet exercice, on calcule modulo 11.

$\overline{2} = \{2 ; 13 ; 24 ; 35 ; 46 ; \ldots\}$
$\overline{3} = \{3 ; 14 ; 25 ; 36 ; 47 ; \ldots\}$
$\overline{6} = \{6 ; 17 ; 28 ; 39 ; 50 ; \ldots\}$

$\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6}$ car si l'on multiplie n'importe quel nombre de la classe de reste $\overline{2}$ avec n'importe quel nombre de la classe de reste $\overline{3}$, on obtient un nombre de la classe de reste $\overline{6}$.

a. Vérifie cette propriété avec quelques nombres de ton choix.

b. Donne la classe de restes qui correspond à chaque multiplication :

$\overline{2} \cdot \overline{6}$ $\quad$ $\overline{6} \cdot \overline{6}$ $\quad$ $\overline{2} \cdot \overline{10}$ $\quad$ $\overline{7} \cdot \overline{6}$

c. Est-il possible que le produit de deux classes de restes soit égal à $\overline{0}$?

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 117 — Opérations de classes

a. Effectue les calculs suivants en classe modulo 6 :

$\overline{3} + \overline{3}$ $\quad$ $\overline{2} + \overline{5} + \overline{4}$ $\quad$ $\overline{5} + \overline{3}$ $\quad$ $\overline{4} + \overline{4} + \overline{4}$

$\overline{2} \cdot \overline{4}$ $\quad$ $\overline{2} \cdot \overline{3}$ $\quad$ $\overline{3} \cdot \overline{3}$ $\quad$ $\overline{3} \cdot \overline{3} \cdot \overline{3} \cdot \overline{3}$

b. Effectue les calculs suivants en classe modulo 9 :

$\overline{3} + \overline{8}$ $\quad$ $\overline{8} + \overline{5} + \overline{4}$ $\quad$ $\overline{5} + \overline{6}$ $\quad$ $\overline{4} + \overline{4} + \overline{4}$

$\overline{2} \cdot \overline{4}$ $\quad$ $\overline{2} \cdot \overline{7}$ $\quad$ $\overline{3} \cdot \overline{8}$ $\quad$ $\overline{3} \cdot \overline{3} \cdot \overline{3}$

c. Effectue les calculs suivants en classe modulo 13 :

$\overline{10} + \overline{8}$ $\quad$ $\overline{11} + \overline{5} + \overline{4}$ $\quad$ $\overline{5} + \overline{9}$ $\quad$ $\overline{7} + \overline{7} + \overline{7}$

$\overline{2} \cdot \overline{12}$ $\quad$ $\overline{9} \cdot \overline{7}$ $\quad$ $\overline{6} \cdot \overline{6}$ $\quad$ $\overline{6} \cdot \overline{6} \cdot \overline{6} \cdot \overline{6}$

CO 118

CO 119 — Le jour de la semaine

Il existe une formule pour calculer le jour de la semaine de toutes les dates après 1582 (année de la modification du calendrier par le pape Grégoire).

Pour ce calcul, on définit cinq nombres ***J, M, S, A*** et ***B***.
J est le numéro du jour, ***M*** est le numéro du mois compté à partir de mars, ***S*** correspond aux deux premiers chiffres de l'année et ***A*** aux deux derniers. ***B*** = 2 pour les années bissextiles, ***B*** = 1 sinon.

Par exemple, le 24 janvier 2014 donne : ***J*** = 24, ***M*** = 11, ***S*** = 20, ***A*** = 14 et ***B*** = 1.
Le jour de la semaine ***n*** se calcule ainsi :

$$n = \left\{ J + \left[\frac{13 \cdot M - 1}{5} \right] + \left[\frac{S}{4} \right] - 2 \cdot S + A + \left[\frac{A}{4} \right] - B \cdot \left[\frac{M}{11} \right] \right\} \text{ (modulo 7)}$$

Les [...] de cette formule signifient que l'on prend la partie entière du nombre qu'ils contiennent.
Par exemple : [5,2] = 5.

Si ***n*** = 1, la date correspond à un lundi, si ***n*** = 2, la date correspond à un mardi, ..., si ***n*** = 0, la date correspond à dimanche.

Grâce à cette formule, détermine quel jour de la semaine ont eu lieu les événements suivant :

a. Le 21 juillet 1969, jour où l'homme a posé pour la première fois le pied sur la Lune.

b. Le 3 septembre 2081, jour de la prochaine éclipse totale du Soleil visible depuis la Suisse.

c. Le jour de ta naissance.

d. Le jour de ton prochain anniversaire.

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

La preuve par 9 — CO 120

La preuve par neuf est une technique permettant de vérifier un calcul. Malgré son nom, ce n'est pas une preuve mathématique car elle ne permet pas de montrer qu'un résultat est juste, elle ne décèle avec certitude que certains résultats erronés.
Une preuve non réussie est témoin d'une erreur de calcul.
Une preuve réussie n'est pas une certitude, mais une bonne présomption d'exactitude.
Le principe général est de refaire le calcul beaucoup plus simplement, en remplaçant chaque nombre par la somme de ses chiffres. Cela correspond en fait à sa classe de reste modulo 9.

Cet exemple va te permettre de comprendre comment appliquer la preuve par 9.

Pour vérifier le résultat de la multiplication $35 \cdot 12 = 420$:

– remplace 35 par la somme de ses chiffres, soit $3 + 5 = 8$;

– de même, remplace 12 par $1 + 2 = 3$;

– effectue le calcul simplifié : $8 \cdot 3 = 24$;

– compare la somme des chiffres de ce produit ($2 + 4 = 6$) avec la somme des chiffres du produit à vérifier ($4 + 2 + 0 = 6$).

Si ces deux sommes sont identiques, il y a de fortes chances pour que le calcul soit juste !

CALCUL À VÉRIFIER	ADDITION DES CHIFFRES	CALCUL SIMPLIFIÉ
35 × 12	3 + 5 = 8 1 + 2 = 3	8 × 3
420		24
4+2+0 = 6		2+ 4 = 6

La preuve est réussie, le calcul a de fortes chances d'être juste !

Applique la preuve par 9 aux égalités suivantes pour déterminer celles qui sont fausses :

a. $425 \cdot 372 \overset{?}{=} 158\,200$

b. $342 \cdot 235 \overset{?}{=} 80\,370$

c. $1467 \cdot 67 \overset{?}{=} 98\,829$

d. $1234 \cdot 4321 \overset{?}{=} 5\,322\,114$

e. $3792^2 \overset{?}{=} 14\,379\,264$

f. $11\,111^2 \overset{?}{=} 123\,454\,321$

g. Vérifie ces calculs à l'aide de la calculatrice. Quel genre d'erreur la preuve par 9 ne décèle-t-elle pas ?

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 121 — A la salle d'attente

Agathe, Berthe, Chantal, Didier, Elisabeth, Françoise et Gertrude attendent leur tour à la salle d'attente. Pour passer le temps, Didier propose un petit jeu!
A tour de rôle chacun se numérote, Agathe commence en annonçant 1, Berthe dit 2, Chantal dit 3, Didier dit 4, Elisabeth dit 5, Françoise dit 6, Gertrude dit 7, puis c'est à nouveau au tour de Françoise qui dit 8, puis Elisabeth dit 9, ainsi de suite,...
On constate qu'Agathe dit 1 , 13 , 25 , ... , et Berthe 2 , 12 , 14 , 24 , ...

Au moment où le dentiste entre dans la salle d'attente, l'un des sept patients dit 2020.
De qui s'agit-il?

CO 122 — Deux Zen

a. Quel est le chiffre des unités de 2^{10} ? de 2^{32} ? de 2^{2015} ?

b. Que dire de 2^n ?

c. Et que dire de $2^{32} \cdot (2^{31} - 1)$?

CO 123 — Que de 1, 2, 3, 4

Quel est le chiffre des unités de $1^{234} + 2^{341} + 3^{412} + 4^{123}$?

CO 124 — Dans les rangs de l'armée chinoise

Combien l'armée du stratège militaire Han Xing (231–196 av. J.-C.) comportait-elle de soldats si,

- en les comptant 3 par 3, il restait deux soldats;
- en les comptant 5 par 5, il restait trois soldats;
- en les comptant 7 par 7, il restait deux soldats?

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

Les truffes au chocolat — CO 125

Un pâtissier a confectionné des truffes. S'il les emballe par 11, il en reste 6; par 13, il en reste 7 et par 17 il en reste 1.

Combien de truffes a-t-il confectionnées au minimum?

Tour de magie — CO 126

Le grand marabout Boudeficelle annonce à son assemblée:
«Choisissez, sans me le dire, un nombre entier entre 1 et 500. Je vais seulement vous demander trois nombres construits à l'aide de celui-ci et je retrouverai sans trop de difficulté le nombre que vous avez choisi. Pour cela, divisez votre nombre par 5 et donnez-moi le reste obtenu. Faites de même avec la division par 7 et celle par 19. Ces trois restes me suffisent pour retrouver votre nombre».

Anatole annonce: «En divisant par 5, il me reste 1, en divisant par 7, il me reste 6 et en divisant par 19, il me reste 2».

Quel est le nombre qu'Anatole a choisi?

Histoire de pirates — CO 127

Une bande de dix-sept pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager de manière équitable et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors trois pièces. Mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier quatre pièces. Malheureusement, quelques jours plus tard, dans un naufrage, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés. Le partage donne alors cinq pièces d'or au cuisinier.

Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates?

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays

CO 128 — Histoire de bus

Le bus 12 passe devant chez moi toutes les 15 minutes, le bus 4 toutes les 28 minutes et le bus 16 toutes les 31 minutes. Le bus 12 a passé à 12 h 02, le bus 4 à 12 h 07 et le bus 16 passe à l'instant à 12 h 08.

Combien de minutes dois-je attendre pour les voir passer en même temps devant chez moi?

CO 129 — Question de brassage

Tu possèdes un jeu de dix cartes numérotées de 1 à 10 que tu brasses de la manière suivante:

– tu partages le jeu en deux tas égaux ;
– tu prends alternativement la première carte de chaque tas en commençant par le deuxième tas;
– tu places les cartes prélevées les unes au-dessous des autres afin de former un nouveau tas unique.

Si l'ordre initial des cartes était de 1 ; 2 ; 3 ; … ; 9 ; 10 il devient 6 ; 1 ; 7 ; 2 ; 8 ; 3 ; 9 ; 4 ; 10 ; 5 après le premier brassage.

a. Quel est l'ordre des cartes après quatre brassages?

b. Combien de brassages sont-ils nécessaires pour que la première carte se retrouve en troisième position?

c. Après combien de brassages les cartes sont-elles à nouveau dans l'ordre initial?

d. Quelle est la position de la carte 6 après 36 brassages?

e. Quelle carte est en tête de série après 888 brassages?

f. Considérons un jeu de 36 cartes que l'on brasse de la même manière.
Après combien de brassages les cartes sont-elles à nouveau dans l'ordre initial?

canton de vaud

Lausanne, 2019, ©DGEO, tous droits réservés pour tous les pays